15/10/18

Υπενθύμιση

$\mathbb{R}^n$: ο διανυσματικός χώρος διανυσμάτων :
$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ με βάση: $\bar{e}_i = (0, \ldots, \underset{i\text{-θέση}}{1}, \ldots, 0, \ldots, 0)$

όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$

• $\underset{(x_1, \ldots, x_n)}{\bar{x}} + \underset{(y_1, \ldots, y_n)}{\bar{y}} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

• $a \cdot \bar{x} = (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n)$ $(a > 0)$ όπου θεωρούμε όλες τις πράξεις (και ιδιότητες) του $\mathbb{R}$ γνωστές

→ Εσωτερικό γινόμενο : $\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ ⇒ Ιδιότητες

ιδίως $\underbrace{\bar{x} \cdot \bar{x}}_{\|\bar{x}\|^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ και $\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$
$\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow x_i = 0$

νόρμα του $\bar{x}$ $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \geq 0$

Επίσης, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$
$\|a \cdot \bar{x}\| = |a| \cdot \|\bar{x}\|$ $(a \in \mathbb{R})$

→

$(\Leftrightarrow) \; \|a\cdot\bar{x}\|^2 = |a|^2 \cdot \|\bar{x}\|^2$

$= \underbrace{(ax_1, \dots, ax_n)}$ $= a^2 \cdot \|\bar{x}\|^2$

$= \sum_{i=1}^{n} (ax_i)^2 = a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2 \cdot \|\bar{x}\|^2$

Συνέχεια ...

$\boxed{\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \quad \text{Τριγωνική Ανισότητα SOS}}$

Απόδειξη: Αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Cauchy - Swarz

• Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα
$\Rightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}: \; a\bar{x} + b\bar{y} \neq \bar{0}$

$[\, a\bar{x} + b\bar{y} = \bar{0} \Rightarrow a = b = 0 \,]$

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $\underbrace{\lambda\bar{x} + \bar{y} \neq 0}$ $\quad [\,(a,b) = (\lambda, 1)\,]$

$\Leftrightarrow \|\lambda\bar{x} + \bar{y}\|^2 > 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \; 0 < \|\lambda\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\lambda\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\lambda\bar{x} + \bar{y}) =$

$= \lambda^2 \underset{\|\bar{x}\|^2}{(\bar{x}\cdot\bar{x})} + 2\lambda\, \bar{x}\cdot\bar{y} + 1 \underset{\|\bar{y}\|^2}{(\bar{y}\cdot\bar{y})} = \underline{\lambda^2} \cdot \|\bar{x}\|^2 + \underline{\lambda} \cdot 2\bar{x}\cdot\bar{y} + \underline{1} \cdot \|\bar{y}\|^2$

Όμως διακρίνουσα $(2\bar{x}\cdot\bar{y})^2 < 4\|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| < \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\| \Leftrightarrow \|\lambda\bar{x} + \bar{y}\|^2 > 0$

• Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$: γραμμικώς εξαρτημένα, τότε:
$\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $\bar{y} = \lambda\bar{x}$ και τότε:
$|\bar{y}\cdot\bar{x}| = |\lambda\bar{x}\cdot\bar{x}| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|^2 = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{x}\|$
$= \|\bar{y}\| \cdot \|\bar{x}\|$

$\Rightarrow$

και τέλος αν $\bar{x}=\bar{0}$ ∨ $\bar{y}=\bar{0}$:

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 = \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$$

Από την ανισότητα Cauchy - Swarz προκύπτει η τριγωνική ανισότητα: $\|\bar x+\bar y\|^2 = (\bar x+\bar y)\cdot(\bar x+\bar y) =$

$$= \|\bar x\|^2 + 2\bar x\cdot\bar y + \|\bar y\|^2 \le \|\bar x\|^2 + 2\underbrace{|\bar x\cdot\bar y|}_{\le \|\bar x\|\cdot\|\bar y\|} + \|\bar y\|^2 \le (\|\bar x\|+\|\bar y\|)^2$$

Επίσης, ισχύει η αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

$$\boxed{\|\bar x\| - \|\bar y\| \le \|\bar x-\bar y\| \quad \forall \bar x,\bar y\in\mathbb{R}^n}$$ SOS

(Η απόδειξη ως ΑΣΚΗΣΗ)

Μια πιθανή απόδειξη της αντιστρ. τριγ. ανισ.

$$\|\bar x\| = \|(\bar x-\bar y)+\bar y\| \underset{\text{τριγ.αν}}{\le} \|\bar x-\bar y\| + \|\bar y\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\bar x\| - \|\bar y\| \le \|\bar x-\bar y\| \overset{\bar x \leftrightarrow \bar y}{\Longrightarrow} \|\bar y\|-\|\bar x\| \le \|\bar y-\bar x\|$$

Από τις ιδιότητες των πραγματικών έχω:

$$\|\bar y-\bar x\| = \|\bar x-\bar y\|$$

Η νόρμα $\|\bar x\| := \sqrt{\bar x\cdot\bar x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

ονομάζεται Ευκλείδεια νόρμα (ή νόρμα 2)

Στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν και άλλες νόρμες (π.χ) η $\|\bar x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ και $\|\bar x\|_\infty := \max\{|x_i| : i=1,\dots,n\}$

ΑΣΚΗΣΗ: Δ.ο. οι $\|\bar x\|_1$, $\|\bar x\|_\infty$ είναι νόρμες (βλ. ορισμό)

<u>Ορισμός</u>: Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (γενικότερα ισχύει $\forall$ διαν. χώρο που έχει αυτές τις νόρμες) λέγονται <u>ισοδύναμες</u> αν $\exists\ c, C > 0$ έτσι ώστε: $\boxed{c \cdot \|\bar{x}\|_1 \leq \|\bar{x}\|_2 \leq C\|\bar{x}\|_1 ,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n}$

<u>Πρόταση 1.1.3</u>: Στον $\mathbb{R}^n$ η Ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\|$ $(=\|\bar{x}\|_2)$ και οι $\|\bar{x}\|_1, \|\bar{x}\|_\infty$ είναι ισοδύναμες. Ειδικότερα:

$\Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \overset{(1)}{\leq} \|\bar{x}\|_1 \overset{(2)}{\leq} n \cdot \|\bar{x}\|_\infty$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \overset{(3)}{\leq} \|\bar{x}\| \overset{(4)}{\leq} \sqrt{n} \cdot \|\bar{x}\|_\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \|\bar{x}\| \overset{(5)}{\leq} \|\bar{x}\|_1 \overset{(6)}{\leq} n \cdot \|\bar{x}\|$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\forall i = 1, \ldots, n$: $|x_i| \leq \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\} = \|\bar{x}\|_\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}\|_\infty = n \cdot \|\bar{x}\|_\infty$

και: $\|\bar{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}\|_\infty^2 = n \cdot \|\bar{x}\|_\infty^2$

Από την άλλη, $\forall i: |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|\bar{x}\|_1 \Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_1$

Αντίστοιχα, $|x_i|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \|\bar{x}\|_2^2 \Rightarrow |x_i| \leq \|\bar{x}\|_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2$

(2), (3) $\Rightarrow \|\bar{x}\|_1 \leq n \cdot \|\bar{x}\|_2$

(4), (1) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \|\bar{x}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_1$ II (τέλος)

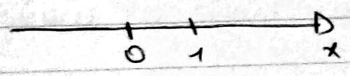
→ Κάθε νόρμα επάγει μια μετρική, δηλ. απόσταση στον $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) := \|\bar{x}-\bar{y}\|$ $\forall\, \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$, δηλ. μια συνάρτηση $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$
- $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$
- $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$
- $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

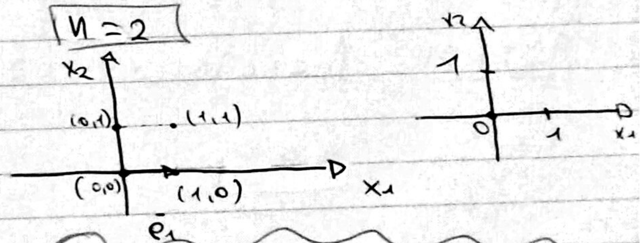
[ΑΣΚΗΣΗ: Οι ιδιότητες της d προκύπτουν απ' τις ιδιότητες της νόρμας.]

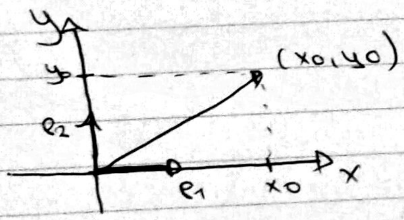
→ Ο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί (ιδίως για $n=1,2,3$) γεωμετρικά

$n=1$



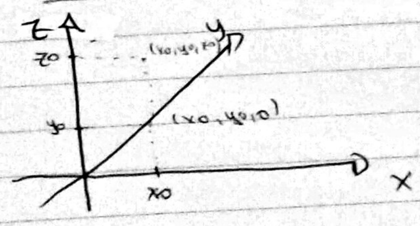
$n=2$

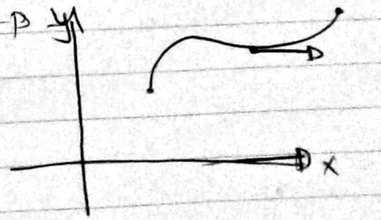




(*) ΣΕ ΚΑΘΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΑ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ $\bar{x}$ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$

$n=3$

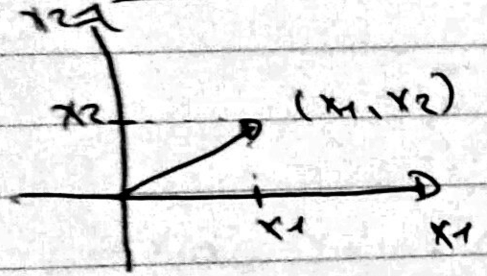


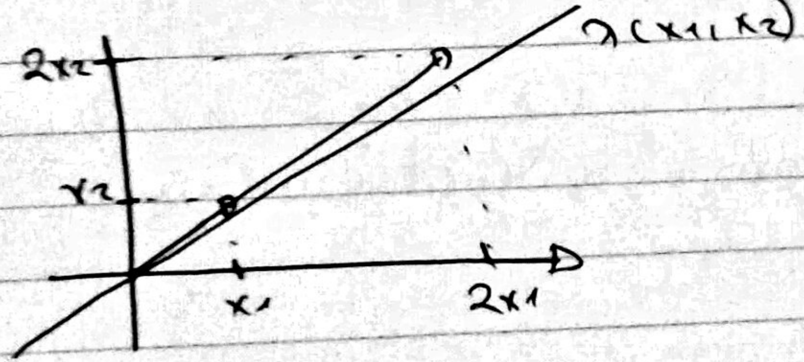


→ Τα σύνολα $\{\lambda\bar{x}, : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ και $\{\lambda\bar{x} + \mu\bar{y} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, $\bar{x}, \bar{y}$: γραμμ. ανεξ. . Τι παριστάνουν αυτά τα σύνολα γεωμετρικά ?

$\boxed{N=2}$

$\{\lambda(x_1, x_2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$





<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Διαβάζω 1.1, 1.2 και λύνω τις ασκήσεις